

جزوه تست مسابان ۲  
مبحث: حد بی نهایت (۱)  
تهیه و تنظیم: گروه آموزشی مکتب

## قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیهٔ ۱: برای عدد طبیعی داریم:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = \text{زوج} \\ -\infty & n = \text{فرد} \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$$

## قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۲: الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{آنگاه}$$

و بر عکس، ب) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

## قضایایی مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۳: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

الف) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $G(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد،  
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $G(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد،  
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

## قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۳: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

(پ) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $G(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد،  
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(ب) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $G(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد،  
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

## قضایایی مربوط به مدهای بی‌نهایت

**نکته:** قضیه ۳ در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

به زبان ساده‌تر قضیه ۳ بیان می‌کند که در توابع کسری، اگر حد صورت عددی غیر صفر و مخرج به صفر میل کند حاصل حد  $\pm\infty$  است، که علامت بی‌نهایت به علامت صورت و نوع صفر حدی مخرج بستگی دارد.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر حدی مثبت}} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر حدی مثبت}} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر حدی منفی}} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر حدی منفی}} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

## قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

**نکته:** اگر مخرج عبارتی مثلثاتی باشد و به صفر میل کند، برای تشخیص نوع صفر حدی مخرج و حاصل حد بهتر است از دایره مثلثاتی استفاده کنیم.

**نکته:** در صفر صفرهایی که توان عامل صفر کننده در مخرج بیشتر باشد، حاصل حد  $\pm\infty$  است.



## قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۴: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{آن گاه: } \circ$$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.  
نکته: قضیه فوق به زبان ساده‌تر یعنی این‌که:

$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$$



# تست های این مبحث

کدام است؟ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

(۱)  $-\infty$

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۳

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x - 3|}$  کدام است؟ ( [ ] ، علامت جزء صحیح است.)

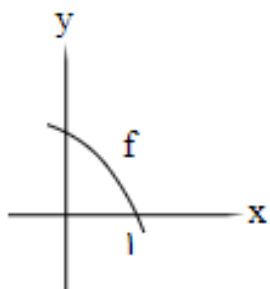
(۱)  $+\infty$

(۲) صفر

(۳)  $-\infty$

(۴)  $-1$

شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)}$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲)  $-\infty$

(۳)  $+\infty$

(۴)  $-1$

در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$  کدام بیان، درست است؟

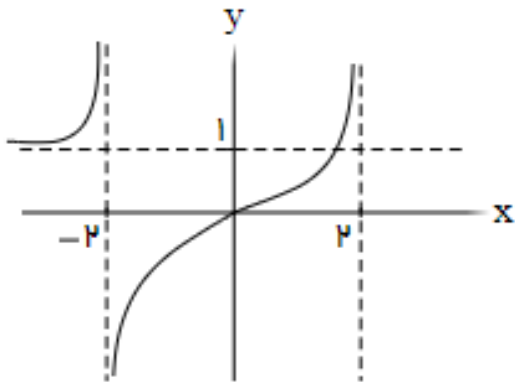
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (4)$$

با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  حد چپ تابع در  $x = -۲$  کدام است؟



(۱)  $+1$

(۲)  $+\infty$

(۳)  $-\infty$

(۴)  $-۲$