

جزوه تست ریاضی تجربی
مبحث: حد بی نهایت (۱)
تهیه و تنظیم: گروه آموزشی مکتب

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیهٔ ۱: برای عدد طبیعی داریم:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = \text{زوج} \\ -\infty & n = \text{فرد} \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$$

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۲: الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ آنگاه}$$

و بر عکس، ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $G(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $G(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

(پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $G(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $G(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،
آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

نکته: قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

به زبان ساده‌تر قضیه ۳ بیان می‌کند که در توابع کسری، اگر حد صورت عددی غیر صفر و مخرج به صفر میل کند حاصل حد $\pm\infty$ است، که علامت بی‌نهایت به علامت صورت و نوع صفر حدی مخرج بستگی دارد.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر حدی مثبت}} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر حدی مثبت}} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر حدی منفی}} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر حدی منفی}} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

نکته: اگر مخرج عبارتی مثلثاتی باشد و به صفر میل کند، برای تشخیص نوع صفر حدی مخرج و حاصل حد بهتر است از دایره مثلثاتی استفاده کنیم.

نکته: در صفر صفرهایی که توان عامل صفر کننده در مخرج بیشتر باشد، حاصل حد $\pm\infty$ است.

قضایای مربوط به مدهای بی‌نهایت

قضیهٔ ۴: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{آن‌گاه : } \circ$$

تذکر: قضیهٔ فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.
نکته: قضیهٔ فوق به زبان ساده‌تر یعنی این‌که:

$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$$

تست های این مبحث

کدام است؟ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

(۱) $-\infty$

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x - 3|}$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

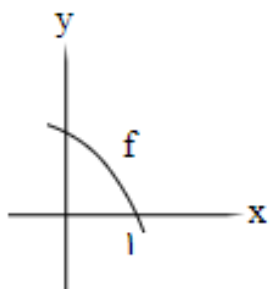
(۱) $+\infty$

(۲) صفر

(۳) $-\infty$

(۴) -1

شکل روبه‌رو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) $-\infty$

(۳) $+\infty$

(۴) -1

در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ کدام بیان، درست است؟

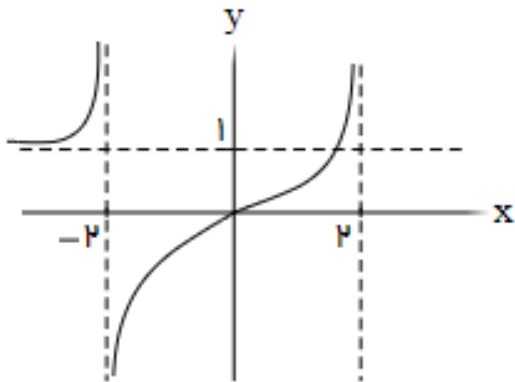
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (4)$$

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ حد چپ تابع در $x = -۲$ کدام است؟



(۱) $+1$

(۲) $+\infty$

(۳) $-\infty$

(۴) -۲