جزوه تست گسسته

مبحث: گراف

تهیه و تنظیم: گروه آموزشی مکعب

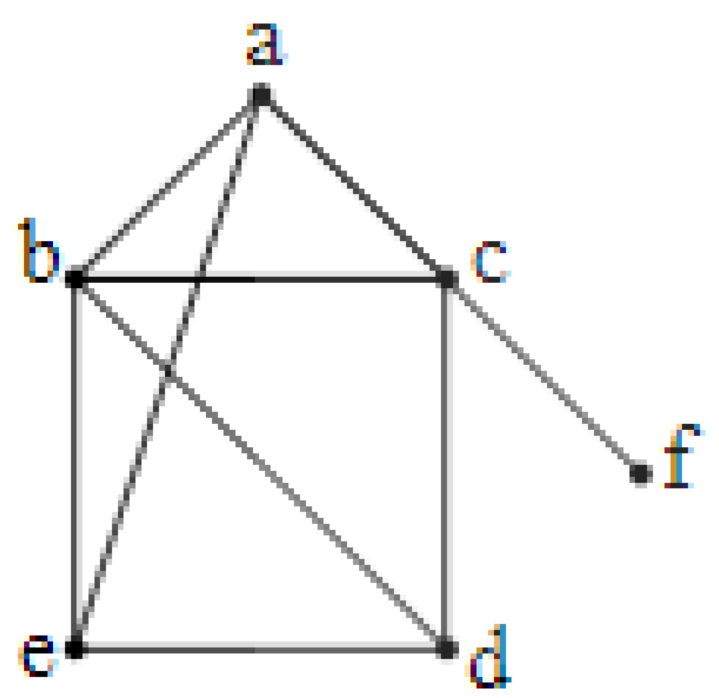
گراف:

گراف ساده G زوج مرتبی است مانند $G=(V,E)$ که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و E زیرمجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای مجموعهٔ V را رأس‌های گراف و اعضای مجموعهٔ E را یال‌های گراف می‌نامند.

تعاریف اولیه:

۱– دو رأس مجاور (همسایه): در گراف $G=(V,E)$ دو رأس a و b را مجاور یا همسایه گویند، هرگاه دو سر یک یال باشند.

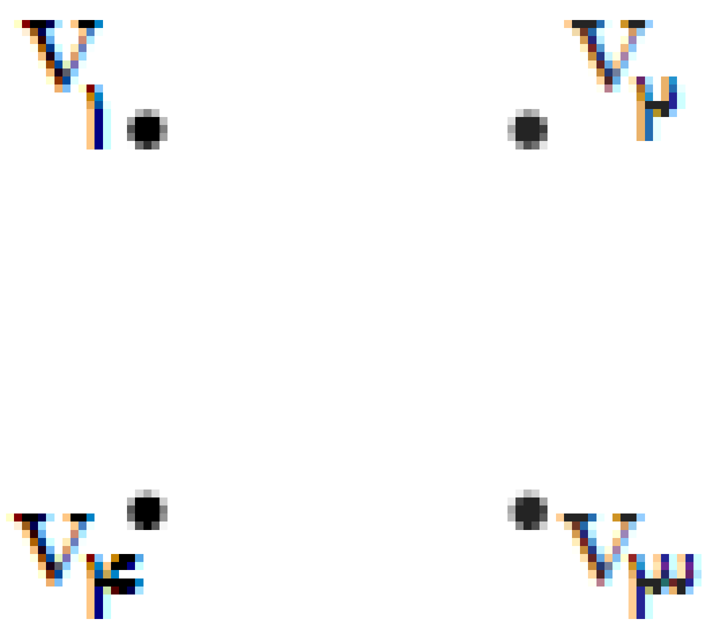
۲ – دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند. در شکل (*) یال‌های ac و cf مجاورند.



(*)

گراف

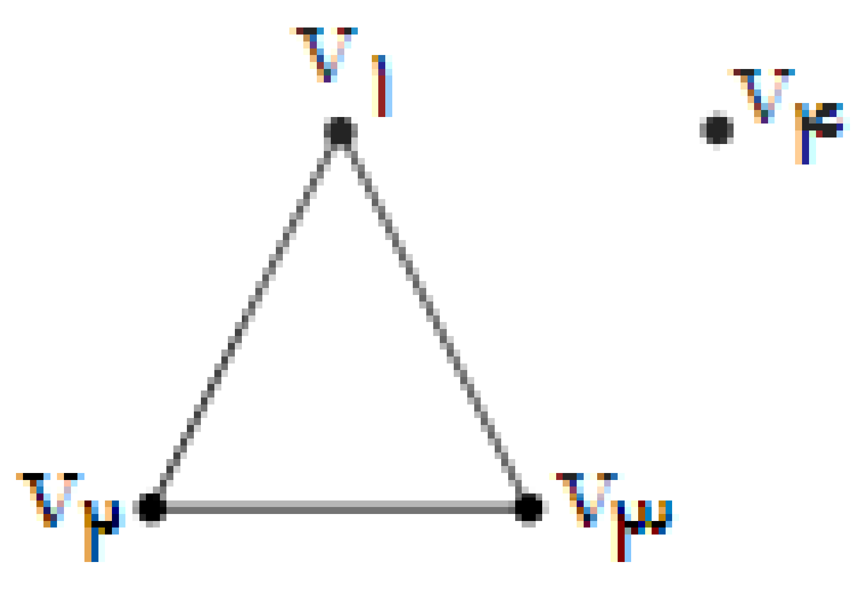
۳ – گراف تهی: گراف $G=(V,E)$ را تهی گوییم هرگاه یال نداشته باشد به عبارت دیگر $E=\emptyset$ مانند گراف شکل زیر:



*در گراف تهی هیچ ۲ رأسی مجاور نیستند.

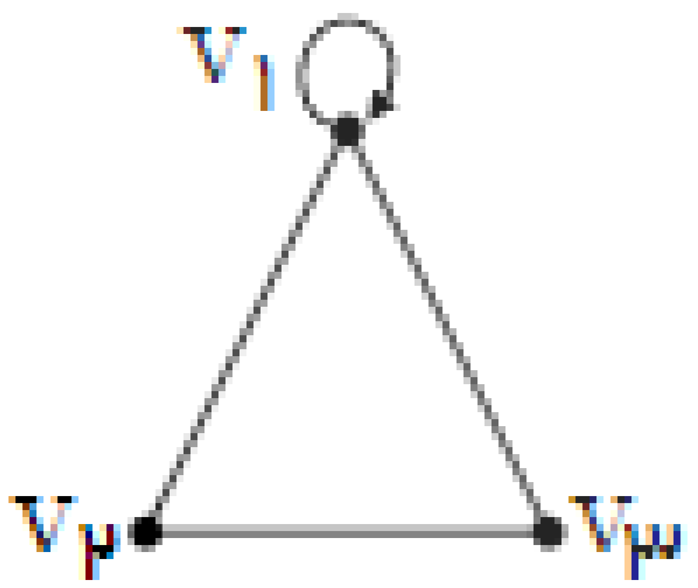
*گراف تهی تمام رأس‌هایش منفرد است و برعکس.

۴ – رأس منفرد (تنها): در گراف $G=(V,E)$ رأس v را منفرد یا تنها می‌گوییم هرگاه یالی از آن عبور نکند. مانند رأس v_4 در گراف زیر:



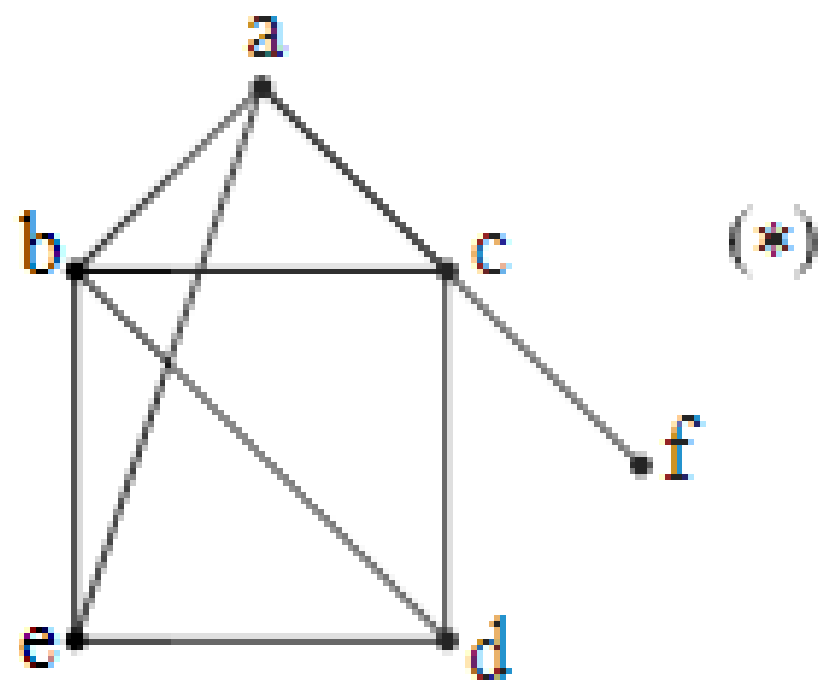
۵ – طوقه: یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. در واقع ۲ سر طوقه یک رأس می‌باشد. به عنوان مثال گراف مقابل در رأس V_1 طوقه دارد.

❋در گراف‌های ساده طوقه وجود ندارد.



گراف

۶ – مجموعه همسایگی‌های یک رأس: اگر v رأسی از گراف G باشد به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند «همسایگی باز آن رأس» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.
توجه شود که $N_G(v)$ شامل خود رأس v نیست. حال اگر خود رأس را در همسایگی در نظر بگیریم، «همسایگی بسته رأس v» به‌دست می‌آید که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. در گراف (*) داریم:

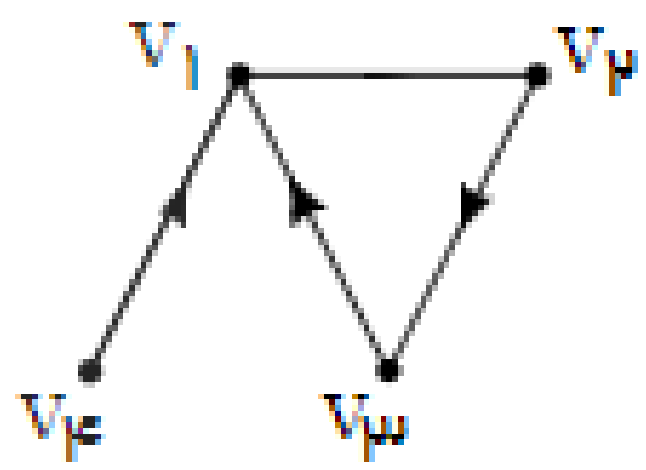


$$N_G(a) = \{b, c, e\} \;,\; N_G(f) = \{c\} \;,\; N_G(e) = \{b, d, a\}$$

$$N_G[c] = \{c, f, d, a, b\} \;,\; N_G[f] = \{c, f\}$$

گراف

۷ – گراف جهت‌دار: در گراف $G=(V,E)$ اگر برای یال‌ها جهت در نظر بگیریم گراف به‌دست آمده گراف جهت‌دار خواهد شد. در گراف جهت‌دار عضوهای مجموعهٔ E به‌صورت زوج‌های مرتب از عضوهای مجموعهٔ V می‌باشد. به‌عنوان مثال داریم:



$$E = \{(v_1 , v_2) , (v_2 , v_3) , , (v_3 , v_1) , (v_4 , v_1)\}$$

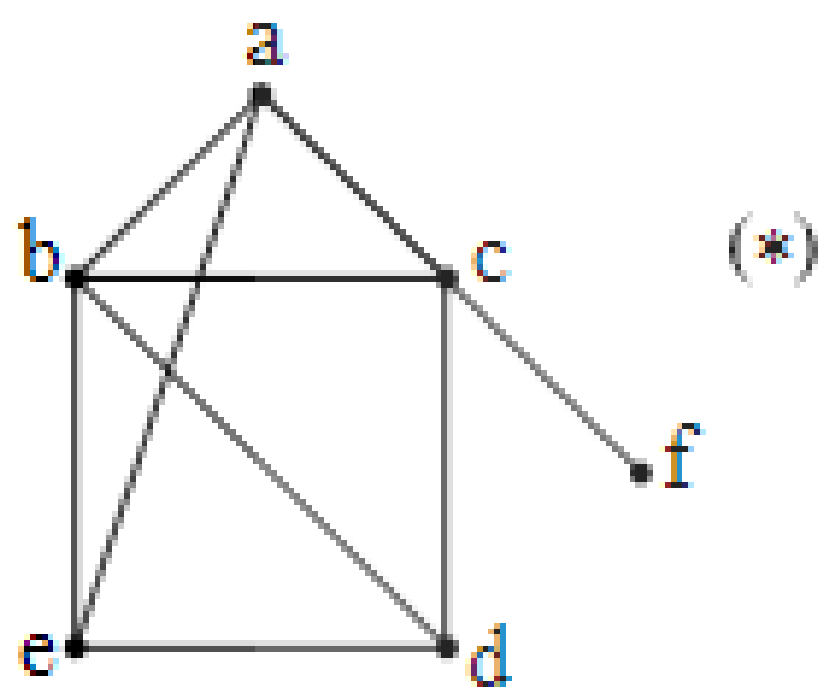
یا

$$E = \{v_1 v_2 , v_2 v_3 , v_3 v_1 , v_4 v_1\}$$

❋گرافی ساده است که الف) در هیچ رأسی طوقه نداشته باشد. ب) یال‌های آن جهت نداشته باشند. ج) بین ۲ رأس آن یا اصلاً یال وجود نداشته باشد یا فقط یک یال وجود داشته باشد.

گراف

۸ – مرتبه و اندازهٔ یک گراف: در گراف Gتعداد رأس‌ها را مرتبهٔ گراف گویند و آن را با pنشان می‌دهند و همچنین تعداد یال‌های گراف را اندازهٔ گراف Gگویند و با qنشان می‌دهند. به‌عنوان مثال در گراف (*) داریم:
اندازه: $q=۹$ و مرتبه: $p=۶$



۹– درجهٔ یک رأس: درجهٔ هر رأس برابر است با تعداد یال‌هایی که از آن رأس عبور می‌کند. درجهٔ رأس vرا با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس عددی زوج باشد آن رأس را رأس زوج و در غیر این صورت آن را رأس فرد می‌نامیم. درجهٔ رأس منفرد صفر است.
به عنوان مثال در گراف (*) داریم:

$\deg a = ۳$ $\quad \deg e = ۳$

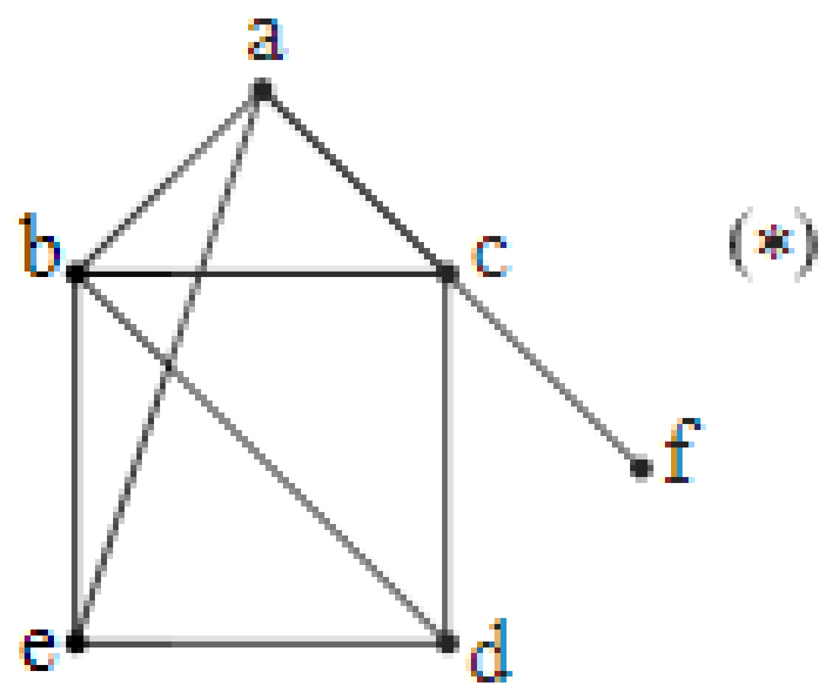
$\deg b = ۴$ $\quad \deg f = ۱$

$\deg c = ۴$

$\deg d = ۳$

گراف

۱۰- ماکسیمم و مینیمم درجه: بزرگترین عدد و کوچکترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف Gرا به‌ترتیب ماکسیمم درجه و مینیمم درجه می‌نامیم و آن‌ها را به‌ترتیب با Δ و δنشان می‌دهیم.



به‌عنوان مثال در گراف (*) داریم:

$$\Delta = ۴$$

$$\delta = ۱$$

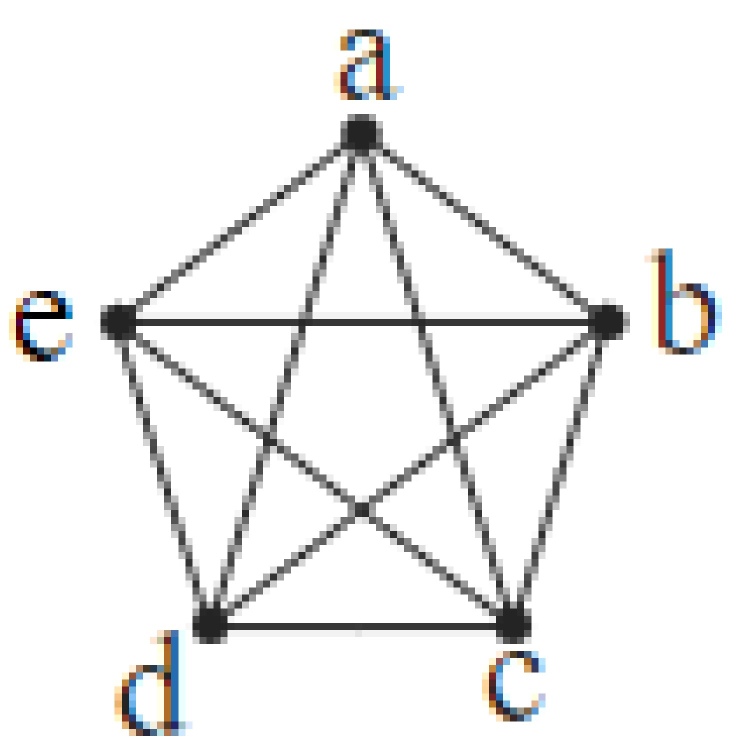
*اگر گرافی دارای pرأس باشد آنگاه بیشترین درجهٔ یک رأس می‌تواند p-۱ باشد از طرفی کمترین درجهٔ یک رأس نیز می‌تواند صفر باشد پس:

$$۰ \le \delta \le p-۱ \quad , \quad ۰ \le \Delta \le p-۱$$

توجه شود که اگر در گراف Gدرجهٔ رأسp-۱ باشد این رأس با تمام رأس‌های دیگر گراف مجاور است پس در این گراف رأس درجه صفر نخواهیم داشت.

تست های مبحث

گراف شکل زیر، چند زیر گراف دارد به گونه‌ای که در هر کدام از آن ها، $q=5$ و $\deg(a)=4$ باشد؟



۱) ۳

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۸

در گرافی با اندازهٔ ۲۴، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آنگاه تعداد آن‌ها کدام می تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۸، $\delta = 2$ و $\Delta = 5$ است. اندازهٔ این گراف چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲۳
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۲۶

در یک گراف ساده، $q=32$ و $\Delta=4$ است. اگر مجموع درجات رئوس زوج این گراف برابر ۵۴ باشد، آنگاه تعداد رئوس درجهٔ فرد این گراف کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

چند نوع گراف ساده از مرتبه ۶ وجود دارد که در هر یک از آنها بزرگ‌ترین درجه برابر یک باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

اگر رأس‌ها را نام‌گذاری نکنیم، با ۵ رأس و ۲ یال چند گراف ساده می‌توانیم رسم کنیم؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

در یک گراف ساده که ۱۷ رأس دارد، اگر mرا تعداد رأس‌های فرد و nرا تعداد رئوس مرتبه زوج درنظر بگیریم، کدام گزینه حتماً درست است؟

۱) m>n
۲) ۲m+۳n عددی فرد است.
۳) $(-1)^n < (-1)^m$
۴) nmعددی زوج است.